Números reales

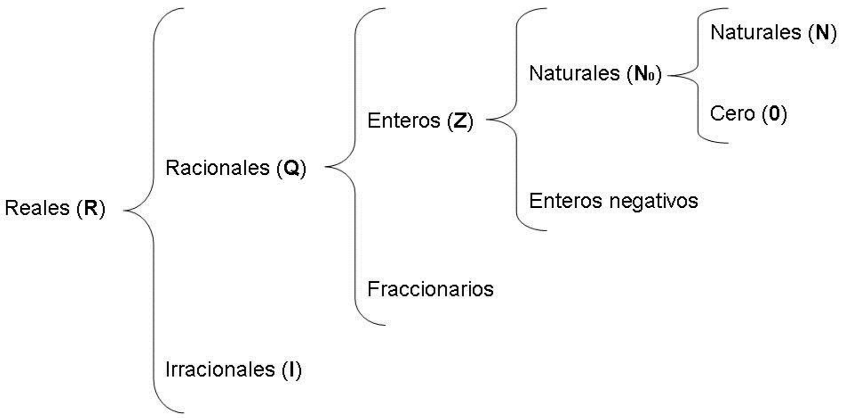
Si un número posee infinitas cifras decimales no periódicas, no puede escribirse como un cociente entre números enteros, es decir, no es un Número Racional. Estos números reciben el nombre de *Números Irracionales (I)*

Existen infinitos números irracionales, algunos de ellos son:

- La diagonal del cuadrado de lado 1: $\sqrt{2}$
- El número *e*, presente en muchos modelos matemáticos de procesos naturales.
- La relación entre la longitud de una circunferencia y su radio: π

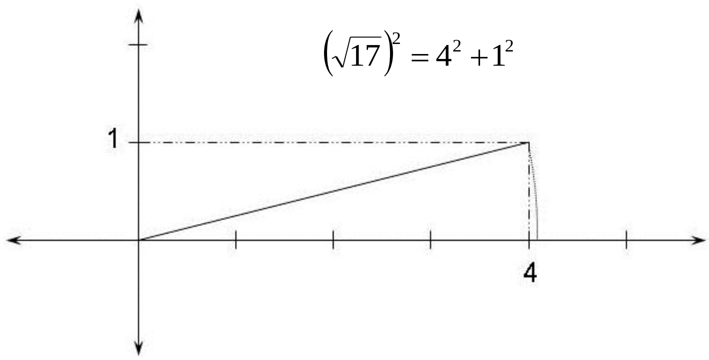
El conjunto, formado por la unión de los números racionales (Q) y los irracionales (I), se llama conjunto de los **Números Reales** y, se designa por **R**.

Si en una recta situamos un origen (el cero, 0) y determinamos la longitud unidad, a cada punto le corresponde un número racional o un número irracional. Es decir, a cada punto de la recta le corresponde un único número real y recíprocamente.



Si un numero irracional es radical cuadrático o una combinación de ellos, se puede representar construyendo triángulos rectángulos (se utiliza el teorema de Pitágoras donde la hipotenusa es el número a representar).

Por ejemplo, representamos: $\sqrt{17}$



Operaciones y propiedades en R

Potenciación en R

En la operación $\mathbf{a^n = b}$, en el cual **a** es la base, **n** el exponente y **b** la potencia, con la condición de que la base y el exponente no sean simultáneamente nulos, se verifican:

1. **Propiedad uniforme:** $a = b \Rightarrow a^n = b^n$
2. **Propiedad distributiva con respecto al producto y al cociente:**
$$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n \qquad (a : b)^n = a^n : b^n$$
3. **Producto de potencias de igual base:** $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$
4. **Cociente de potencias igual base:** $a^m : a^n = \dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$
5. **Potencia de exponente nulo:** $a^n : a^n = \dfrac{a^n}{a^n} = a^{n-n} = a^0 = 1$ **con** $a \neq 0$
6. **Potencia de una potencia:** $\left(a^m\right)^n = a^{m \cdot n}$
7. **Potencia negativa:** $a^{-n} = \left(\dfrac{1}{a}\right)^n$
8. **Exponente fraccionario:** $a^{\frac{b}{c}} = \sqrt[c]{a^b}$
9. **Cuadrado de la suma o de la diferencia:** $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2 \cdot a \cdot b + b^2$
10. **Cubo de la suma o de la diferencia:** $(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3 \cdot a^2 \cdot b + 3 \cdot a \cdot b^2 \pm b^3$

Radicación en R

$$\sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow b^n = a$$

- a es el radicando
- n es el índice, $n \geq 2$
- b es la raíz

Se verifican las siguientes propiedades:

1. **Propiedad uniforme:** $a = b \Rightarrow \sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{b}$
2. **Propiedad distributiva respecto del producto y el cociente:**

$$\sqrt[n]{(a \cdot b)} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} \qquad \sqrt[n]{(a : b)} = \sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b}$$

3. **Ley de simplificación:**

Si n es impar: $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = \sqrt[n]{a^n} = a$ $\qquad \left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$

Si n es par: $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = \sqrt[n]{a^n} = |a|$

4. **Raíz de raíz**

$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m \cdot n]{a}$

Operaciones con radicales:

Extracción e introducción de factores de un radical:

Extracción:

Tenemos que tener en cuenta que sólo se podrán extraer del radical aquellos factores cuyo exponente sea igual o mayor que el índice de la raíz.

$$\sqrt{32} = \sqrt{2^5} = \sqrt{2^2.2^2.2} = \sqrt{2^2}.\sqrt{2^2}.\sqrt{2} = 2.2.\sqrt{2} = 4.\sqrt{2}$$

$$\sqrt{12} = \sqrt{2^2 \cdot 3} = 2\sqrt{3}$$

Introducción:

Es el proceso inverso a la extracción y para ello basta elevar cada factor a introducir por el índice de la raíz.

$$2^3 \cdot 3^3 \cdot \sqrt[4]{6} = \sqrt[4]{\left(2^3\right)^4 \cdot \left(3^3\right)^4 \cdot 6} = \sqrt[4]{2^8 \cdot 3^{12} \cdot 3 \cdot 2} = \sqrt[4]{2^9 \cdot 3^{13}}$$

Adición y sustracción

Sólo pueden operarse términos que tengan radicales semejantes. Dos radicales son semejantes si tienen el mismo índice y el mismo radicando.

$$3\sqrt{5} + 2\sqrt{5} - 6\sqrt{5} = -1\sqrt{5} \qquad 2\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{a} = \sqrt{b} + 3\sqrt{a}$$

Producto y cociente

$$\sqrt{3}.\sqrt{5} = \sqrt{3.5} = \sqrt{15} \qquad \sqrt[3]{5} : \sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{5:2} = \sqrt[3]{\frac{5}{2}}$$

Para multiplicar o dividir radicales con distinto índice, es necesario convertirlos a común índice. Encontrar un común índice es encontrar radicales que, siendo equivalentes a los dados, tengan un índice común.

Ejemplo 1:

$$\sqrt{2}.\sqrt[3]{5}.\ \sqrt[5]{2} =$$

Se reduce a común índice: $\sqrt{2}\,;\ \sqrt[3]{5}\,;\ \sqrt[5]{2}$

Una alternativa es buscar el **mcm** de 2, 3 y 5:

$$\begin{array}{c|c} 2 & 2 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{c|c} 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{c|c} 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

$$mcm = 2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$$

$$\sqrt{2} = \sqrt[30]{2^{15}} \qquad \sqrt[3]{5} = \sqrt[30]{5^{10}} \qquad \sqrt[5]{2} = \sqrt[30]{2^{6}}$$

$$\sqrt{2}.\sqrt[3]{5}.\ \sqrt[5]{2} = \sqrt[30]{2^{15}}.\sqrt[30]{5^{10}}.\sqrt[30]{2^{6}} = \sqrt[30]{2^{21}.5^{10}}$$

Ejemplo 2:

$$\sqrt[3]{5} : \sqrt[4]{2} = \sqrt[12]{5^4} : \sqrt[12]{2^3} = \sqrt[12]{5^4 : 2^3} = \sqrt[12]{\frac{625}{8}}$$

Racionalización de denominadores:

Se llama racionalización al procedimiento mediante el cual se logra convertir una expresión con denominador irracional en otra equivalente con denominador racional.

Se pueden presentar dos casos:

- Un término en el denominador

$$\frac{3}{5\sqrt{2}} = \frac{3}{5\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{5 \cdot 2} = \frac{3}{10}\sqrt{2}$$

$$\frac{2}{\sqrt[5]{3}} = \frac{2}{\sqrt[5]{3}}\frac{\sqrt[5]{3^4}}{\sqrt[5]{3^4}} = \frac{2\sqrt[5]{3^4}}{\sqrt[5]{3^5}} = \frac{2}{3}\sqrt[5]{3^4}$$

- Dos términos en el denominador

$$\frac{3}{2+\sqrt{5}}=\frac{3}{2+\sqrt{5}}\cdot\frac{2-\sqrt{5}}{2-\sqrt{5}}=\frac{3.(2-\sqrt{5})}{(2+\sqrt{5}).(2-\sqrt{5})}=\frac{6-3\sqrt{5}}{4-2\sqrt{5}+2\sqrt{5}-\sqrt{5}^2}=$$

$$=\frac{6-3\sqrt{5}}{4-5}=\frac{6-3\sqrt{5}}{-1}=-6+3\sqrt{5}$$

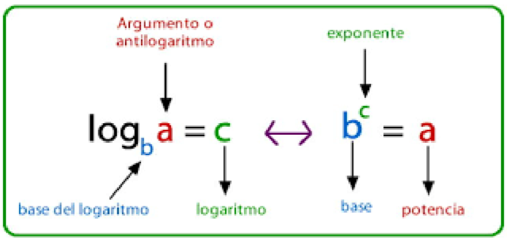
Intervalos

Los intervalos son subconjuntos de los números reales

cerrado	$[a,b]=\{x\in\mathbb{R}\,:\,a\le x\le b\}$	a b
abierto	$(a,b)=\{x\in\mathbb{R}\,:\,a<x<b\}$	a b
semiabierto o semicerrado	$[a,b)=\{x\in\mathbb{R}\,:\,a\le x<b\}$	a b
semiabierto o semicerrado	$(a,b]=\{x\in\mathbb{R}\,:\,a<x\le b\}$	a b
semirrecta cerrada	$[a,+\infty)=\{x\in\mathbb{R}\,:\,x\ge a\}$	a
semirrecta abierta	$(a,+\infty)=\{x\in\mathbb{R}\,:\,x>a\}$	a
semirrecta cerrada	$(-\infty,b]=\{x\in\mathbb{R}\,:\,x\le b\}$	b
semirrecta abierta	$(-\infty,b)=\{x\in\mathbb{R}\,:\,x<b\}$	b
recta real	$(-\infty,+\infty)=\mathbb{R}$	

Logaritmo:

Logaritmo de un número es el exponente al que hay que elevar la base para obtener el argumento. Definición:



$$\boxed{\begin{array}{l} a>0 \\ b>0 \\ b\neq 1 \end{array}}$$

De la definición de logaritmo podemos decir:

- No existe el logaritmo de un numero con base negativa
- No existe el logaritmo de un numero negativo
- No existe el logaritmo de cero

- El logaritmo de 1 es cero $\log_a 1 = 0$
- El logaritmo en base **a** de **a** es 1. $\log_a a = 1$

Propiedades de los logaritmos

- **Producto**

El logaritmo de un producto en una base dada, es igual a la suma de los logaritmos de los factores en esa misma base.

$$\log_a (b \cdot c) = \log_a b + \log_a c$$

- **División**

El logaritmo de un cociente en una base dada, es igual a la diferencia entre el logaritmo del dividendo y el del divisor.

$$\log_a (b : c) = \log_a \left(\frac{b}{c} \right) = \log_a b - \log_a c$$

- **Potencia**

El logaritmo de una potencia en una base dada es igual al producto entre el exponente de la potencia y el logaritmo de la base de la potencia

$$\log_a b^m = m \cdot \log_a b$$

Logaritmos decimales

Se llaman logaritmos decimales a los logaritmos que tienen por base el numero 10.

$$\log_{10} x = \log x$$

Logaritmo Neperiano o natural

Se llaman así a los logaritmos que tienen por base el numero **e**.

$$\log_e x = \ln x$$

Donde **e** es irracional y aproximadamente igual a 2.71828182845904523…

Cambio de bases

La siguiente formula es útil, ya que define al logaritmo de **x** en base **a** (suponiendo que **a**, **x** y **b** son números reales positivos y que tanto **a** como **b** son distintos de 1)

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$$

Ejemplo:

$$\log_2 5 = \frac{\log 5}{\log 2}$$

Números Complejos

La resolución de ciertas ecuaciones en el campo de los números reales dieron origen a los números complejos.

$$(x-1)^2+4=0$$
$$(x-1)^2=-4$$
$$x-1=\sqrt{-4}$$

La radicación de índice par y radicando negativo NO TIENEN SOLUCIÓN EN R

$\therefore$ *Resulta necesario ampliar el campo numérico.*

Definiendo el conjunto de los números complejos

$$x-1=\sqrt{4}.\sqrt{-1}$$
$$x-1=\pm 2.i$$
$$x=1\pm 2.i$$
$$x_1=1+2.i$$
$$x_2=1-2.i$$

$$\boxed{\sqrt{-1}=i}$$

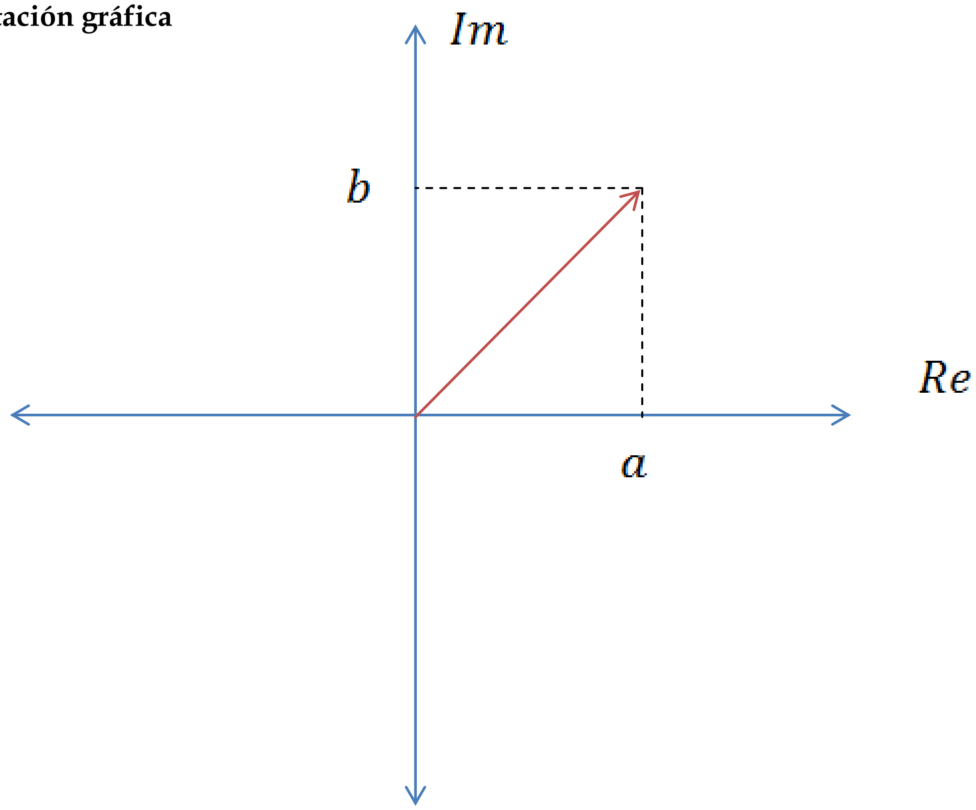
Un número complejo en la forma binómica se escribe $Z=a+bi$

La parte real de Z: $Re(Z)=a$

La parte imaginaria de Z: $Im(Z)=b$

Representación gráfica

$Z=a+bi$



Potencias sucesivas de i

$i^0 = 1$ $\quad$ $i^4 = 1$

$i^1 = i$ $\quad$ $i^5 = i$

$i^2 = -1$ $\quad$ $i^6 = -1$

$i^3 = i^2.i = -i$ $\quad$ $i^7 = -i$

Desde i^4 en adelante se repiten los valores

Si el exponente es $a \in N$ efectuando la división por 4

$$a = 4.q + r \; con \; r < 4$$

$$i^a = i^{4.q+r} = i^{4.q}.i^r = (i^4)^q.i^r = 1.i^r = i^r$$

Adición

Sean $z_1 = a + bi \; y \; Z_2 = c + di$

$Z_1 + Z_2 = (a + c) + (b + d)i$

Sustracción

Sean $z_1 = a + bi \; y \; Z_2 = c + di$

$Z_1 - Z_2 = (a - c) + (b - d)i$

Producto

Sean $z_1 = a + bi \; y \; Z_2 = c + di$

$Z_1.Z_2 = (a + bi).(c + di) = ac + adi + bci + bdi^2 = ac + adi + bci + bd.(-1) = ac + adi + bci - bd = (\boldsymbol{ac - db}) + (\boldsymbol{ad + bc})\boldsymbol{i}$

Conjugado

Sea $Z_1 = a + bi$**, se define** $\overline{Z_1}$ **al número complejo que conserva la misma componente real y posee la opuesta de la componente imaginaria, o sea,** $\overline{Z_1} = a - bi$

Cociente

Sean

$$z_1 = a + bi \; y \; Z_2 = c + di$$

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{a + bi}{c + di} = \frac{a + bi}{c + di} . \frac{\boldsymbol{c - di}}{\boldsymbol{c - di}} =$$

$$= \frac{ac - adi + bci - bdi^2}{c^2 + d^2} =$$

$$= \frac{(ac + bd) + (-ad + bc)i}{c^2 + d^2}$$