Polinomio de una sola variable

Sean $a_0; a_1; a_2; .....; a_n$ números reales y $n \in N_0$, llamaremos polinomio de la variable **x** a toda expresión algebraica entera de la forma: $a_0 - a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n$

Los polinomios se nombran con letras mayúsculas indicando la variable entre paréntesis. Ejemplo: P(x).

$$P_{(x)} = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$$

El polinomio será de grado **n** si el termino de mayor grado es $a_n x^n$ con $a_n \neq 0$.

A a_0 se lo llama termino independiente y su grado es 0.

A a_n se lo llama coeficiente principal del polinomio de grado n.

Ejemplos:

1. $P_{(x)} = 6x^4 + \frac{1}{3}x - 10$ es un polinomio de grado 4
2. $Q_{(x)} = -\frac{1}{3}x + 1$ es un polinomio de grado 1
3. $T_{(x)} = 4$ es un polinomio de grado 0

El polinomio $0x^n + 0x^{n-1} + ... + 0x + 0$ se lo llama polinomio nulo.

Operaciones con polinomios

Adición y sustracción de polinomios

La adición o sustracción entre polinomios da como resultado un nuevo polinomio.

Sean $P_{(x)}$ y $Q_{(x)}$ dos polinomios, en estas operaciones el resultado se obtienen operando términos que compartan el mismo grado.

Ejemplo:

Sean: $P_{(x)} = 2x^4 - x^3 + 2x - 1$ $\quad$ $Q_{(x)} = x^4 + 3x^3 - 2x + 2$

Hallar

$P_{(x)} + Q_{(x)}$ $\quad$ $P_{(x)} - Q_{(x)}$

$$\begin{array}{r} 2x^4 - x^3 + 2x - 1 \\ + \quad x^4 + 3x^3 - 2x + 2 \\ \hline 3x^4 + 2x^3 + 0x + 1 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 2x^4 - x^3 + 2x - 1 \\ - \quad x^4 + 3x^3 - 2x + 2 \\ \hline x^4 - 4x^3 + 4x - 3 \end{array}$$

Polinomios iguales y opuestos

Sean $P_{(x)}$ y $Q_{(x)}$

- Si al *sumarlos* se obtiene el polinomio nulo, entonces son polinomios *opuestos*
- Si al *restarlos* se obtiene el polinomio nulo, entonces son polinomios *iguales*.

Productos de polinomios

Cuando se multiplican dos polinomios, el resultado es polinomio y su grado es igual a la suma de los grados de los polinomios factores, si ellos no son nulos.

Para calcular el producto multiplicamos cada uno de los términos (monomios) de un polinomio por cada uno de los términos del otro polinomio y operamos finalmente entre los términos de igual grado (monomios semejantes).

Ejemplo:

Sea $P_{(x)} = x^3 - 2x + 2$ $\qquad Q_{(x)} = x - 3$

$$P(x).Q(x) = (x^3 - 2x + 2).(x - 3) = x^4 - 3x^3 - 2x^2 + 6x + 2x - 6 = x^4 - 3x^3 - 2x^2 + 8x - 6$$

División de polinomios

Dados dos polinomios $P_{(x)}$ y $Q_{(x)}$, con $Q_{(x)} \neq 0$, existen únicos polinomios $C_{(x)}$ y $R_{(x)}$ tales que:

$$P_{(x)} = Q_{(x)} \cdot C_{(x)} + R_{(x)}$$

Siendo el grado de $R_{(x)}$ menor que el grado de $Q_{(x)}$.

$P_{(x)}$ Recibe el nombre de dividendo, $Q_{(x)}$ el divisor, $C_{(x)}$ el de cociente y $R_{(x)}$ es de resto o residuo.

Los polinomios $C_{(x)}$ y $R_{(x)}$ se obtiene al efectuar la división de $P_{(x)}$ por $Q_{(x)}$ mediante el siguiente procedimiento:

a) Ordenar y completar los polinomios $P_{(x)}$ y $Q_{(x)}$.

b) Se divide el término de mayor grado del dividendo por el término de mayor grado del divisor, el resultado es un sumando del cociente.

c) Se multiplica el sumando del cociente obtenido en el paso anterior por el divisor, y el resultado se resta del dividendo, obteniendo un resto "parcial".

d) Si el grado del resto obtenido en el paso anterior es menor que el grado del divisor, se termina el procedimiento, en caso contrario, se repiten los pasos (a), (b), (c) y (d), pero tomando como dividendo el resto obtenido en el paso anterior.

Ejemplo:

Sea $P_{(x)} = 2x^4 - 3x^2 + 3x - 6x^3 - 1$ $\qquad Q_{(x)} = -3x + x^2 + 1$

Hallar $P_{(x)} : Q_{(x)}$

$$
\begin{array}{r|l}
2x^4-6x^3-3x^2-3x-1 & x^2-3x+1 \\
\hline
-\quad 2x^4-6x^3\ \ +2x^2 \qquad & 2x^2-5 \\
\hline
0\ +\ 0\ -5x^2+3x-1 & \\
-\quad -5x^2+15x-5 & \\
\hline
0\ -18x+4 &
\end{array}
$$

El cociente es $C(x)=2x^2-5$ y el resto es $R(x)=-18x+4$

Se observa que el grado del cociente es la diferencia entre el grado del polinomio dividendo y el grado del polinomio divisor.

Cuando el resto es igual a cero (polinomio nulo) el cociente resulta exacto y en esas condiciones decimos que $P_{(x)}$ es divisible por $Q_{(x)}$, $Q_{(x)}$ es divisor de $P_{(x)}$ o $P_{(x)}$ es múltiplo de $Q_{(x)}$.

Raíces de un polinomios

Un número real a es raíz de un polinomio $P_{(x)}$, si $P_{(x)}$ se anula para $x=a$.

En símbolos: $x=a$ es raíz de $P_{(x)} \Leftrightarrow P_{(a)}=0$

Ejemplo:

$P(x)=x^2-4x+3$

$P(3)=3^2-4.3+3=0$

3 es raíz de P(x)

Regla de Ruffini

La regla de Ruffini es un procedimiento "abreviado" para determinar el cociente y el resto que se obtienen al dividir un polinomio $P_{(x)}$ por un polinomio de la forma $x-a$, con $a \in R$, a partir de los coeficientes de $P_{(x)}$ y el cero o raíz de $x-a$.

A través de un ejemplo explicaremos el mecanismo de cálculo de la Regla de Ruffini.

Sea $P_{(x)}=4x^4+3x^2-5x+2$ y $Q_{(x)}=x-3$

a) Colocamos los coeficientes de $P_{(x)}$(divisor), ordenado y completo, en una fila.

$$4 \quad 3 \quad -5 \quad 2$$

b) Se determina la raíz o cero de $Q_{(x)}$ (divisor). Con esta información generamos la siguientes estructura:

$$\begin{array}{c|cccc} & 4 & 3 & -5 & 2 \\ 3 & & & & \\ \hline & & & & \end{array}$$

$$\begin{array}{c|cccc} & 4 & 3 & -5 & 2 \\ 3 & \downarrow & & & \\ \hline & 4 & & & \end{array}$$

$$\begin{array}{c|cccc} & 4 & 3 & -5 & 2 \\ 3 & & 12 \; + & & \\ \hline \text{x} & 4 & 15 & & \end{array}$$

c) Se repite el proceso y el último valor que se obtiene es el resto de la división.

$$\begin{array}{r|cccc l} & 4 & 3 & -5 & 2 & \Rightarrow coef.\,de\,P_{(x)} \\ Cero\,de\,Q_{(x)} \rightarrow \boxed{3} & & 12 & 45 & 120 & \\ \hline Coef.\,de\,C_{(x)} \Rightarrow & 4 & 15 & 40 & \boxed{122} & \rightarrow resto \end{array}$$

$C(x) = 4x^2 + 15x + 40$ $\qquad\qquad$ $R(x) = 122$

<u>Teorema del resto</u>

Si se realiza la división de un polinomio $P_{(x)}$ por $\left(x-a\right)$, puede ocurrir que el resto sea nulo o de grado cero.

Por lo tanto: $\qquad P_{(x)} = Q_{(x)} \cdot C_{(x)} + R_{(x)}$

Si $R_{(x)} = r$ y $Q_{(x)} = x - a$. Si $x = a$, reemplazando en la igualdad anterior.

$$P_{(a)} = (a-a) \cdot C_{(a)} + r \;\Rightarrow\; P_{(a)} = r$$

Se puede hallar el resto de la división, sin hacer el algoritmo de la operación, basta con hallar el valor de $P_{(x)}$ en $x = a$.

Factorización de polinomios

Representa expresar un polinomio como un producto.

a) **Factor común:** Procedimiento

✓ Buscamos el factor o los factores comunes que se encuentren en todos los términos del polinomio.

✓ Se expresa el polinomio dado como el producto del factor común por el polinomio que resulta de dividir cada término del polinomio original por el factor común.

Ejemplo: $P_{(x)} = 4x^6 + 8x^4 - 2x^2 = 2x^2(2x^4 + 4x^2 + 1)$

b) Factor común en grupo: Procedimiento:

✓ Se forman grupos de igual cantidad de términos que tengan factor común, se sustrae dicho factor común en cada una de los grupos.

✓ Deben quedar términos con un paréntesis (factor) común.

✓ Se extrae dicho paréntesis como factor común.

Ejemplo:

$$P_{(x)} = 7x^5 - 5x^4 + 14x - 10 = \left(7x^5 - 5x^4\right) + \left(14x - 10\right) =$$
$$= x^4\left(7x - 5\right) + 2\left(7x - 5\right) = \left(x^4 + 2\right)\left(7x - 5\right)$$

c) Diferencia de cuadrados:

Se presenta la resta de dos términos y cada uno de ellos está elevado a una potencia par. Procedimiento:

✓ Se debe identificar la resta (debe haber un solo signo negativo) y los cuadrados perfectos.

✓ Calculo las bases de los cuadrados perfectos (haciendo la raíz cuadrada de cada uno)

✓ Transformo la diferencia de cuadrados en un producto de binomios conjugados, formado por dichas base.

Ejemplo: $9x^2 - 25$

$$\left.\begin{array}{l} \sqrt{9x^2} = 3x \\ \sqrt{25} = 5 \end{array}\right\} \textit{entonces } 9x^2 - 25 = \left(3x + 5\right)\left(3x - 5\right)$$

d) Trinomio cuadrado perfecto:

Recordando que: $\left(x \pm a\right)^2 = x^2 \pm 2ax + a^2$

Procedimiento:

✓ Se reconocen los cuadrados perfectos, los cuales no pueden ser negativos.
✓ Se calcula el doble producto de las bases y se verifica que ese resultado se encuentre en el trinomio dado. Si el doble producto figura en el trinomio dado, entonces es un trinomio cuadrado perfecto.
✓ Se expresa como el cuadrado de un binomio.

Ejemplo:

$$P_{(x)} = 4x^6 + \frac{1}{16} + x^3$$

$$\left.\begin{array}{r} \sqrt{4x^6} = 2x^3 \\ \sqrt{1/16} = \dfrac{1}{4} \\ 2 \cdot 2x^3 \cdot \dfrac{1}{4} = x^3 \end{array}\right\} \textit{es un trinomio cuadrado perfecto}$$

$$Entonces: P_{(x)} = 4x^6 + \frac{1}{16} + x^3 = \left(2x^3 + \frac{1}{4}\right)^2$$

e) <u>Cuadrinomio cubo perfecto</u>

Recordando que: $(x+a)^3 = x^3 + 3x^2a + 3xa^2 + a^3$

Procedimiento:
✓ Se reconocen los cubos perfectos
✓ Calcular:

El triple producto del cuadrado de la primera base por la segunda.

El triple producto de la primera base por el cuadrado de la segunda.

✓ Si estos cálculos son parte del cuatrinomio dado, entonces decimos que un cuatrinomio cubo perfecto, y luego se expresa como el cubo de un binomio.

Ejemplo:

$$P_{(x)} = 8x^3 - 36ax^2 + 54a^2x - 27a^3$$

$$\left.\begin{array}{r} \sqrt[3]{8x^3} = 2x \\ \sqrt[3]{-27a^3} = -3a \\ 3 \cdot (2x)^2 \cdot (-3a) = -36ax^2 \\ 3 \cdot (2x) \cdot (-3a)^2 = 54xa^2 \end{array}\right\} \textit{es un cuatrinomio cubo perfecto}$$

$$Entonces: P_{(x)} = 8x^3 - 36ax^2 + 54a^2x - 27a^3 = (2x - 3a)^3$$

f) Suma o diferencia de potencias de igual grado

Se busca una raíz del polinomio y se factoriza utilizando la regla de Ruffini
Ejemplo:

$$P_{(x)} = x^5 + a^5$$

$-a$
Es raíz del polinomio P(x)

	1	0	0	0	0	a^5
$-a$		$-a$	a^2	$-a^3$	a^4	$-a^5$
	1	$-a$	a^2	$-a^3$	a^4	0

$$P_{(x)} = (x + a)\left(x^4 - ax^3 + a^2x^2 - a^3x + a^4\right)$$

Divisibilidad:

En este caso consiste en hallar los divisores del polinomio dado. Esto lo efectuamos mediante la siguiente propiedad:

"Si un número **a** es raíz de un polinomio $P_{(x)}$, dicho polinomio es divisible por $(x - a)$, es decir, al dividir $P_{(x)}$ por $x - a$, el resto de la división es cero"

Por el teorema del resto tenemos que: $P_{(a)} = 0$

$$\begin{array}{l|l} P_{(x)} & (x-a) \\ \hline 0 & C_{(x)} \end{array} \qquad\qquad P_{(x)} = (x - a) \cdot C_{(x)}$$

Este tipo de división la podemos realizar con la regla de Ruffini.

Cálculo de las raíces de un polinomio:

Para calcular las raíces de un polinomio se iguala a 0 la expresión y se resuelve la ecuación.

Ejemplos:

Sea $P_{(x)} = 3x + 1$

$$3x + 1 = 0$$

$$x = \frac{1}{3} \quad \textit{tiene solucion}$$

Sea $P_{(x)} = 2x^2 - 7x + 3$

$$2x^2 - 7x + 3 = 0 \qquad x_{1-2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \textit{siendo en nuestro caso} \quad \begin{matrix} a = 2 \\ b = -7 \\ c = 3 \end{matrix}$$

$$x_{1-2} = \frac{7 \pm \sqrt{(-7)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 3}}{2 \cdot 2} =$$

$$= \frac{7 \pm \sqrt{49 - 24}}{4} = \frac{7 \pm 5}{4} \begin{cases} x_1 = \dfrac{12}{3} = 4 \\ x_2 = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Expresiones algebraicas fraccionarias

Dados dos polinomios $P_{(x)}$ y $Q_{(x)}$, tal que $Q_{(x)}$ sea distinto del nulo, se denomina expresión algebraica fraccionaria a toda expresión de la forma: $\dfrac{P_{(x)}}{Q_{(x)}}$

Ejemplo:

$$\frac{x+3}{x+x^2} = \frac{x+3}{x(1+x)} = \frac{x+3}{x(1+x)} \qquad \forall x : x \neq 0 \wedge x \neq -1$$

Una expresión algebraica es irreducible si no existe en ella factores comunes el numerador y el denominador.

Simplificación de expresiones algebraicas fraccionarias:

Para simplificar una expresión algebraica fraccionaria se debe factorizar el numerador y denominador, y simplificar los factores comunes presentes en ambos; de esta manera se obtiene una expresión irreducible equivalente a la original. El objeto de simplificar, es reducir la expresión y poder efectuar operaciones en forma más sencilla.

Ejemplo:

$$\frac{x^2 + 2x - 3}{x^3 + 3x^2 - x - 3} = \frac{\cancel{(x-1)}\,\cancel{(x+3)}}{\cancel{(x-1)}(x+1)\cancel{(x+3)}} = \frac{1}{(x+1)}$$

Suma y resta de expresiones algebraicas fraccionarias:

Si las expresiones tienen igual denominador, se suman o se restan sus numeradores, según corresponda.

Para expresiones de distinto denominador, estas se deben transformar en otras, equivalentes a las dadas, que tengan el mismo denominador.

Este denominador (denominador común) es el mcm de los denominadores de las expresiones.

Ejemplo:

$$-\frac{1}{2x-2}+\frac{2}{x^2+1}-\frac{x}{x+1}=-\frac{1}{2(x-1)}+\frac{2}{(x-1)(x+1)}-\frac{x}{x+1}$$

$$=\frac{-(x+1)+2\cdot 2-x\cdot 2(x-1)}{2(x-1)(x+1)}$$

$$=\frac{-x-1+4-2x(x-1)}{2(x-1)(x+1)}$$

$$=\frac{-x+3-2x^2+2x}{2(x-1)(x+1)}$$

$$=\frac{-2x^2+x+3}{2(x-1)(x+1)}$$

$$\forall x: x\neq 1 \wedge x\neq -1$$

<u>Multiplicación de expresiones algebraicas fraccionarias</u>:

El resultado de multiplicar dos expresiones algebraicas fraccionarias es otra expresión algebraica fraccionaria cuyo numerador y denominador son el producto de los numeradores y denominadores de las expresiones dadas:

$$\frac{P_{(x)}}{Q_{(x)}}\cdot\frac{T_{(x)}}{S_{(x)}}=\frac{P_{(x)}\cdot T_{(x)}}{Q_{(x)}\cdot S_{(x)}}$$

<u>División de expresiones algebraicas fraccionarias</u>:

El resultado de dividir dos expresiones algebraicas fraccionarias es otra expresión algebraica fraccionaria que se obtiene multiplicando la primera expresión por la reciproca de la segunda:

$$\frac{P_{(x)}}{Q_{(x)}}:\frac{T_{(x)}}{S_{(x)}}=\frac{P_{(x)}}{Q_{(x)}}\cdot\frac{S_{(x)}}{T_{(x)}}$$