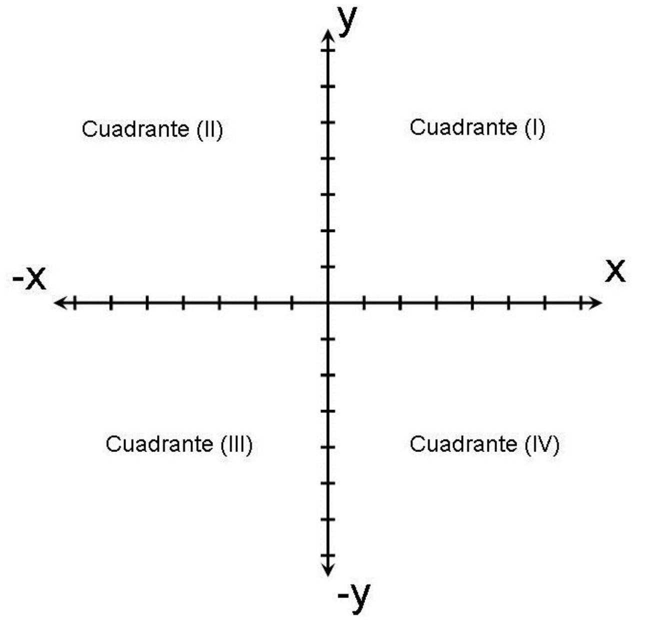
Sistema de coordenadas cartesianas

El sistema de coordenadas cartesianas (René Descartes) consta de dos ejes perpendiculares entre sí. La intersección entre los ejes determina el origen de coordenadas.

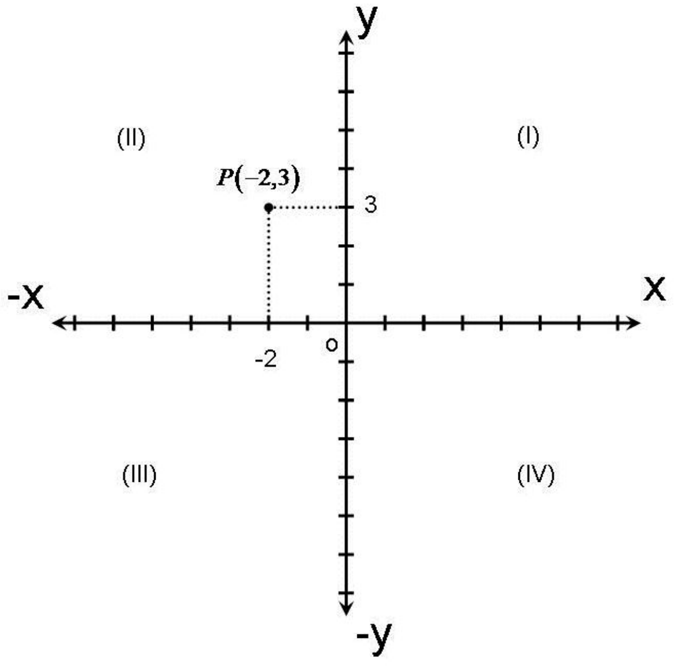
El eje horizontal se denomina eje de abscisas y el eje vertical llamado de eje de ordenadas.

Estos ejes coordenados dividen al plano en cuatro cuadrantes



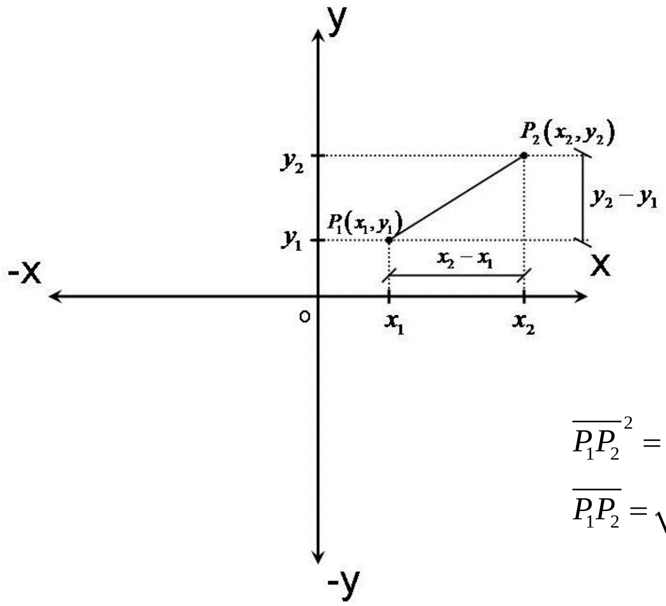
Conociendo las coordenadas de un punto este puede ubicarse en el plano.

Ejemplo: $P(-2,3)$.



Distancia entre dos puntos del plano

Sean $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$



$$\overline{P_1P_2}^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$

$$\overline{P_1P_2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$\therefore d(P_1P_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

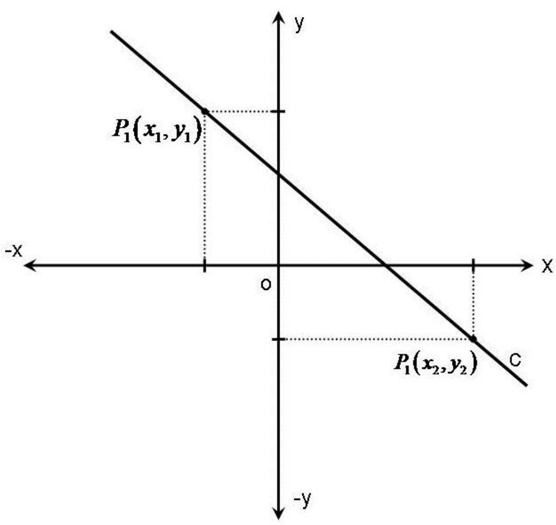
Fórmula de distancia entre 2 puntos

Ecuación de la recta

La recta como lugar geométrico

Un lugar geométrico es un conjunto de puntos que satisfacen determinadas propiedades geométricas.

Definimos recta como el lugar geométrico de los puntos, tales que, tomando dos puntos diferentes cualesquiera $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$ del lugar geométrico, el valor de la *pendiente* **m** calculada por medio de la fórmula: $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1},\ x_2 \neq x_1 \quad (I)$ resulta constante.



Existen diferentes formas de escribir la ecuación de la recta.

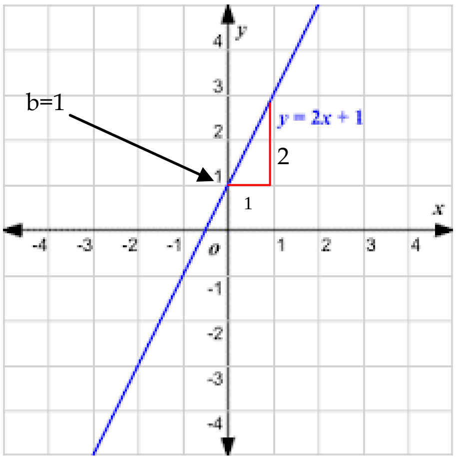
- La ecuación *general o implícita* de la recta tiene la siguiente estructura: $A.x + B.y + C = 0$

- La ecuación *explícita* es $y = m.x + b$, donde m es la pendiente y b la ordenada al origen

Representación gráfica

y=2x+1

m=2

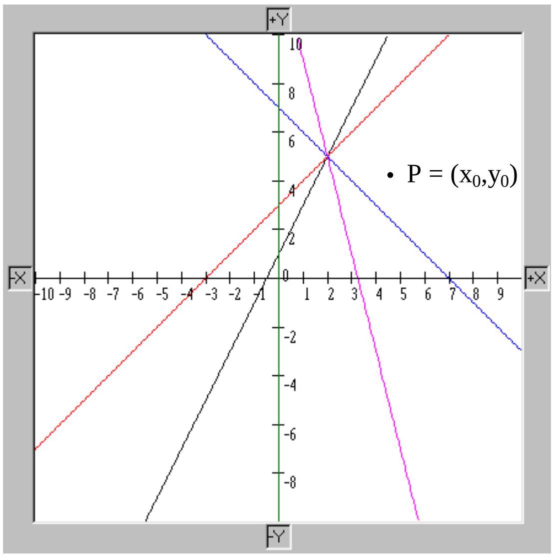


La pendiente (m) indica la variación de la variable dependiente (y), por cada unidad que varíe la variable independiente (x), es decir, la cantidad de unidades que disminuye o aumenta "y" por cada unidad que "x" se desplaza hacia la derecha.

La Ordenada al origen (b) es un valor que indica donde la recta intersecta al eje de ordenadas. Dado que la intersección es un punto, este tendrá como coordenadas (0,b).

Ecuación de la recta dado un punto y la pendiente

Por un punto del plano pasan infinitas rectas.



Consideramos el haz de rectas que pasa por el punto P (x_0,y_0).

La ecuación explícita de una recta del plano es:

$$y = m \,.\, x + b \quad (1)$$

Si la recta pasa por P sus coordenadas verifican la ecuación anterior.

$$y_0 = m \,.\, x_0 + b \quad (2)$$

Restando miembro a miembro (1) y (2) y sacando factor común m:

$$\boxed{y - y_0 = m \,.\, (x - x_0)}$$

Conclusión: Podemos encontrar la ecuación de la recta teniendo como datos la pendiente y un punto perteneciente a ella.

Ecuación de la recta que pasa por dos puntos

Por dos puntos pasa una sola recta.

Consideremos los puntos P_0 (x_0,y_0) y P_1 (x_1,y_1), pertenecientes a la recta.

Dado que cada punto pertenece a la recta, sus coordenadas satisfacen la ecuación de la recta.

$y_0 = m \,.\, x_0 + b$ $\qquad$ $y_1 = m \,.\, x_1 + b$

Restamos miembro a miembro.

$$y_1 - y_0 = m \,.\, x_1 + b - (m \,.\, x_0 + b)$$

$$y_1 - y_0 = m \,.\, x_1 + b - m \,.\, x_0 - b$$

$$y_1 - y_0 = m \,.\, (x_1 - x_0)$$

$$\frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = m$$

Habiendo obtenido el valor de la pendiente de la recta y teniendo en cuenta que la recta pasa por el punto $P_1(x_1,y_1)$, usamos la ecuación anteriormente obtenida.

$$y - y_1 = m \,.\, (x - x_1)$$

Reemplazamos el valor de m.

$$\boxed{y - y_1 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} \,.\, (x - x_1)}$$

Posiciones relativas de la recta

Dos rectas son paralelas si tienen la misma pendiente.
Sean

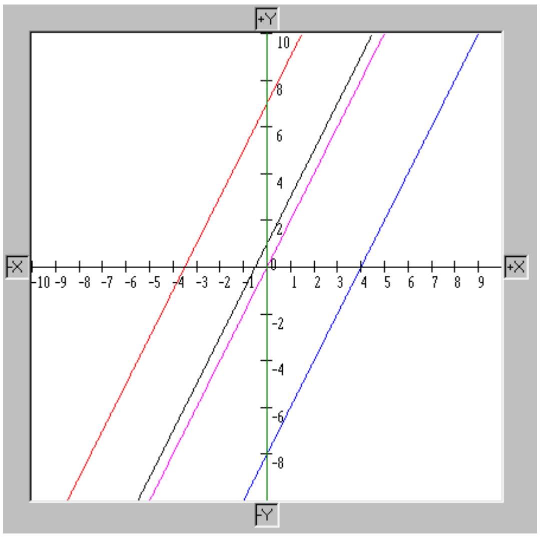
$$l_1 : y = m_1 x + b_1$$
$$l_2 : y = m_2 x + b_2$$

Entonces $l_1 // l_2$ si solo si $m_1 = m_2$

Ejemplo:

$$\left.\begin{array}{l} y = 2 . x + 1 \\ y = 2 . x + 7 \\ y = 2 . x \\ y = 2 . x - 8 \end{array}\right\}$$

Son rectas paralelas. Tienen igual pendiente ***m = 2***



Dos rectas son perpendiculares cuando el producto de sus pendientes es -1.
Sean:

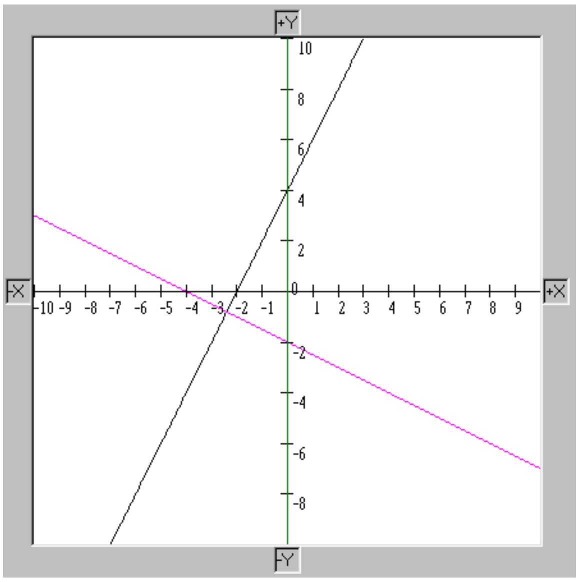
$$l_1 : y = m_1 x + b_1$$
$$l_2 : y = m_2 x + b_2$$

Entonces $l_1 \perp l_2$ si solo si $m_1 \cdot m_2 = -1$

Ejemplo:

l_1: y = - ½ . x - 2
l_2: y = 2 . x + 4

$$m_1 . m_2 = -\frac{1}{2} . 2 = -1$$



Sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas

Una ecuación lineal con dos incógnitas es una expresión de la forma: $ax + by = c$ donde a, b, c son valores numéricos (coeficientes) y las incógnitas son **x** e **y.** Gráficamente representa una recta en el plano.

Un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas será de la forma:

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$

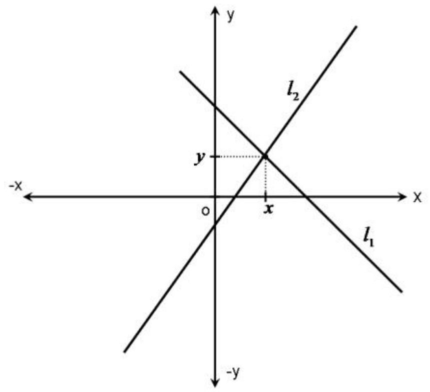
Resolver el sistema implica encontrar los valores de las variables que satisfacen ambas ecuaciones.

Gráficamente lo que tenemos son dos rectas en el mismo plano.

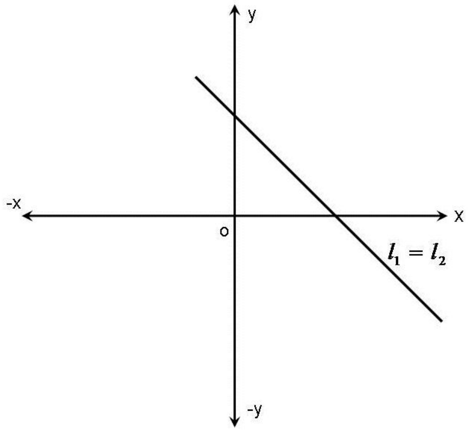
En este tipo de sistema de ecuaciones se pueden presentarse los siguientes casos:

- **Sistema compatible:** el sistema admite solución.

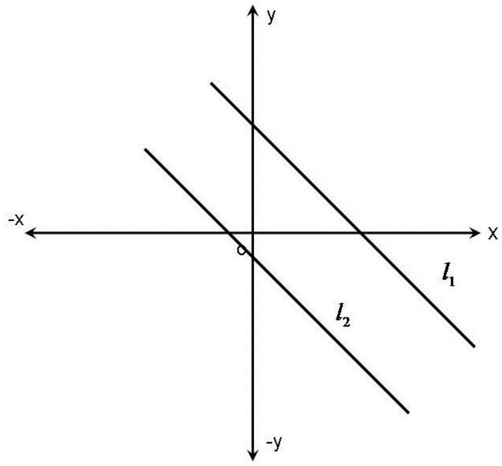
  - ✓ **Sistema compatible determinado:** El sistema tiene única solución. La representación gráfica consta de dos rectas que se cortan en un punto; los valores de **x** e **y** de este punto son la solución al sistema.



  - ✓ **Sistema compatible determinado:** el sistema admite infinitas soluciones. La representación gráfica son dos rectas coincidentes. Cualquier punto de las recta es solución del sistema.



▪ **Sistema incompatible:** el sistema no admite solución. En este caso, su representación grafica son dos rectas paralelas.



Métodos de solución algebraicos

Método de sustitución

1º Despejar una incógnita en una de las ecuaciones.
2º Sustituir en la otra ecuación la incógnita despejada.
3º Resolver la ecuación resultante, que es de primer grado y obtenemos el valor de una de las incógnitas.
4º Sustituir el valor obtenido en la ecuación despejada en el 1º paso y la resolvemos
5º Verificar los resultados obtenidos

Ejemplo:

$$\begin{cases} 2x + y = 7 & (I) \\ x + 3y = 11 & (II) \end{cases}$$

De la ecuación (I) $\quad y = 7 - 2x$

En la (II) $\quad x + 3(7 - 2x) = 11$

$$x + 21 - 6x = 11 \Rightarrow x = 2$$

$$y = 7 - 2 \cdot 2 \Rightarrow y = 3$$

Verificación $\begin{cases} 2 \cdot 2 + 3 = 7 \\ 2 + 3 \cdot 3 = 11 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4 + 3 = 7 \\ 2 + 9 = 11 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 7 = 7 \\ 11 = 11 \end{cases}$

Solución: $x = 2;\ y = 3$

Método de sumas y restas

Consiste en conseguir que al sumar o restar dos ecuaciones del sistema resulte una ecuación con una sola incógnita.

Para ello será necesario multiplicar una ecuación y en algunos casos los de las dos ecuaciones por números convenientes para que en las dos ecuaciones los coeficientes de una de las incógnitas sean números opuestos o iguales.

Ejemplo: $$\begin{cases} x+2y=9 & (I) \\ 3x-y=20 & (II) \end{cases}$$

✓ Multiplicando por 2 la (II) $$\begin{cases} x+2y=9 & (I) \\ 6x-2y=40 & (II) \end{cases}$$

✓ Sumando miembro a miembro las dos ecuaciones

$$\begin{array}{rr} & x+2y=9 \\ + & \underline{6x-2y=40} \\ & 7x=49 \\ & x=7 \end{array}$$

✓ Calculamos el valor de la otra incógnita sustituyendo la **x** en cualquiera de las dos ecuaciones.

En la (I) quedaría:

$$7+2y=9$$
$$2y=9-7$$
$$y=\frac{2}{2}$$
$$y=1$$

Solución: $x=7;\ y=1$

Método de igualdad

1º Despejar la misma variable de las dos ecuaciones
2º Igualar las dos expresiones
3º Resolver la ecuación resultante y obtener el valor de una de las incógnitas.
4º Sustituimos el valor de la incógnita obtenida en cualquiera de las ecuaciones despejadas en el 1º paso.

Ejemplo:

$$\begin{cases} 3x - 2y = 8 \\ x + y = 6 \end{cases}$$

$$1)\begin{cases} 3x - 2y = 8 \quad \Rightarrow \quad x = \dfrac{8 + 2y}{3} \\ x + y = 6 \qquad \Rightarrow \quad x = 6 - y \end{cases}$$

$$2)\ \frac{8 + 2y}{3} = 6 - y$$

$$3)\ 8 + 2y = 18 - 3y$$

$$5y = 10$$

$$y = 2$$

$$3)\ x + 2 = 6$$

$$x = 6 - 2$$

$$x = 4$$

$$solucion: \quad x = 4\,; \ \ y = 2$$