Trigonometría

La trigonometría es una de las ramas de la matemática, cuyo significado etimológico es “la medición de los triángulos”. Se deriva del vocablo griego trigōno: "triángulo" y metron: "medida".

La trigonometría estudia las relaciones entre los ángulos y los lados de los triángulos. Para esto se vale de las razones trigonométricas, las cuales son utilizadas frecuentemente en cálculos técnicos.

Por lo tanto, el objetivo de ésta es establecer las relaciones matemáticas entre las medidas de las longitudes de los segmentos que forman los lados de un triangulo con las medidas de las amplitudes de sus ángulos, de manera que resulte posible calcular los unos mediante los otros.

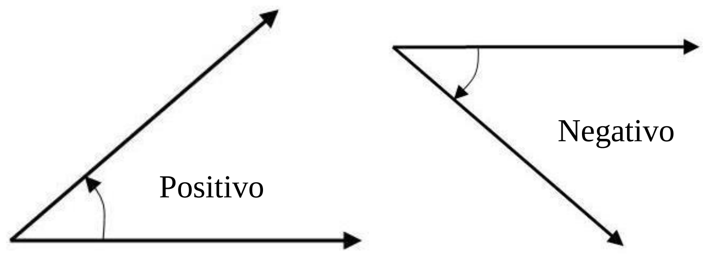
Sistema de medición de ángulos

Recordamos algunas cuestiones relacionadas con los signos de los ángulos y las unidades en que se miden los mismos.

Signos de los ángulos:

Tomaremos como ángulo positivo aquel que se obtiene de hacer rotar una semirrecta en sentido antihorario.

Y como Angulo negativo aquel que se obtiene de hacer girar una semirrecta en sentido horario.



Sistema de medición de ángulos

Analizaremos dos sistemas diferentes que se usan para expresar la medida de un ángulo.

Estos sistemas son el “**Sistema Sexagesimal**” y el “**Sistema Circular**”

1. Sistema sexagesimal

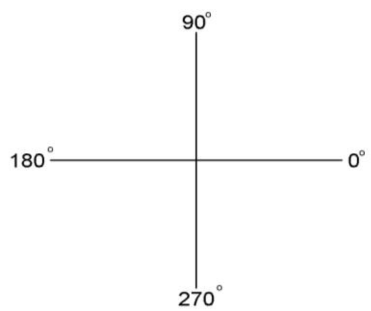
Este sistema utiliza como unidad de medida de los ángulos, el “grado sexagesimal”(º).

La revolución completa corresponde a 360º.

El grado sexagesimal posee submúltiplos (minutos y segundos), los cuales verifican las siguientes equivalencias:

1º corresponde a 60′

1′ corresponde a 60′′



2. **Sistema circular.**

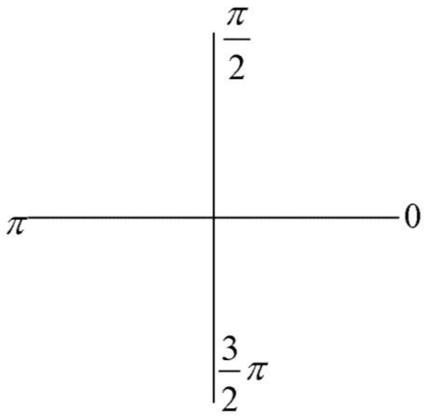
Este sistema utiliza como unidad de medida el "radian" (Rad.). Se define un radian de la siguiente manera:

"Un ángulo tiene una medida de un radian (1rad) cuando describe un arco de circunferencia cuya longitud es igual al radio de la misma"

Para saber cuantos radianes mide un ángulo determinado, debemos saber cuantas veces cabe el radio de la circunferencia en el arco de la misma recorrido por dicho ángulo.

Podemos comenzar con el ángulo llano (180º). Si queremos saber cuantas veces entra el radio en media circunferencia veremos que lo hace π veces.

De esta manera podemos completar la revolución:



$$Medida\ del\ angulo\ en\ radianes = \frac{Medida\ del\ arco\ descripto}{medida\ del\ radio}$$

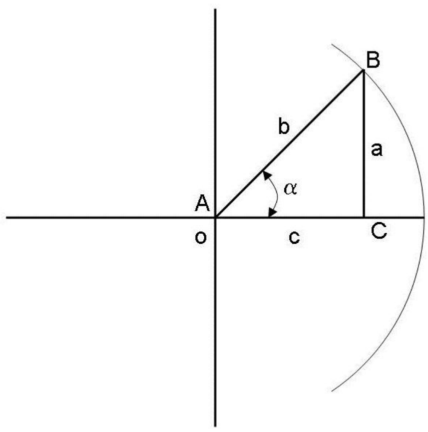
En este caso, la revolución completa corresponde a 2π Rad.

De esta manera podemos establecer una equivalencia entre el sistema sexagesimal y el circular:

π radianes equivalen a 180º

<u>Razones trigonométricas</u>

El triángulo **ABC** es un triángulo rectángulo en **C**, lo que usaremos para definir las razones seno, coseno y tangente, el ángulo **α**, correspondiente al vértice **A**, situado en el centro de circunferencia.



- El seno (sen) de un ángulo es la razón entre el cateto opuesto y la hipotenusa.

$$sen\alpha = \frac{a}{b}$$

- El coseno (cos) de un ángulo es la razón entre el cateto adyacente y la hipotenusa.

$$\cos\alpha = \frac{c}{b}$$

- La tangente (tg) de un ángulo es la razón entre el cateto opuesto y el cateto adyacente.

$$tg\alpha = \frac{a}{c}$$

- La cosecante (cosec) de un ángulo es la razón recíproca del seno.

$$\cos ec\alpha = \frac{1}{sen\alpha}$$

- La secante (sec) de un ángulo es la razón recíproca del coseno.

$$\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha}$$

- La cotangente (cotg) de un ángulo es la razón recíproca de la tangente

$$\cot g\alpha = \frac{1}{tg\alpha}$$

Los signos de las razones trigonométricas en los cuatro cuadrantes, se resumen en el siguiente cuadro:

	Primer Cuadrante	Segundo Cuadrante	Tercer Cuadrante	Cuarto Cuadrante
Sen Y Cosec	+	+	-	-
Cos Y Sec	+	-	-	+
Tg Y Cotg	+	-	+	-

<u>Relaciones entre las funciones trigonométricas</u>

Dado los ejes de coordenadas cartesianas **xy** de centro **O**, y una circunferencia genérica (circunferencia de radio igual a la unidad) con centro en **O**; el punto de corte de la circunferencia con lado positivo de las **x**, lo señalamos **E**.

Nótese que el punto **A** es el vértice del triángulo y **O** es el centro de coordenadas del sistema de referencia: $A \equiv O$

La recta **r**, que pasa por **O** y forma un ángulo **α** con el eje **x**, corta a la circunferencia en el punto B, la vertical que pasa por **E** corta la recta **r** en el punto **D**.

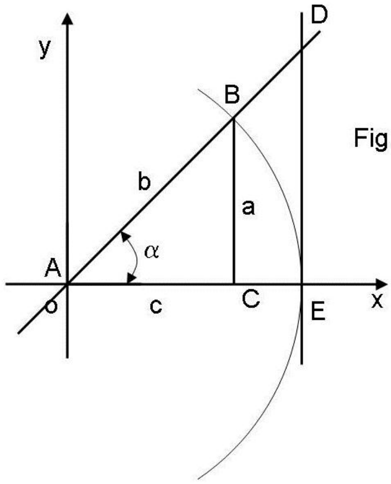


Fig. a

Por semejanza triángulos: $\dfrac{\overline{CB}}{\overline{OC}} = \dfrac{\overline{ED}}{\overline{OE}} \quad (1)$

Los puntos **E** y **B** están en la circunferencia de centro **O**, por eso las distancias $\overline{OB}\ y\ \overline{OE}$ son el radio de circunferencia, en este caso, al ser una circunferencia de radio 1, se verifica:

$$\left.\begin{aligned} sen(\alpha) &= \frac{\overline{CB}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{CB}}{1} \\ \cos(\alpha) &= \frac{\overline{OC}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{OC}}{1} \\ tg(\alpha) &= \frac{\overline{CB}}{\overline{OC}} = \frac{\overline{DE}}{\overline{OE}} = \frac{\overline{DE}}{1} \end{aligned}\right\} (2)$$

Reemplazando (2) en (1), tenemos: $\dfrac{sen(\alpha)}{\cos(\alpha)} = tg(\alpha)$

Considerando el triángulo rectángulo $\overset{\Delta}{ABC}$ (según Fig. a), por el teorema de Pitágoras: $\overline{CB}^2 + \overline{OC}^2 = \overline{OB}^2 \quad (3)$

Reemplazando (2) en (3), y sabiendo que $\overline{OB} = radio = 1$ tenemos:

$$sen^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$$

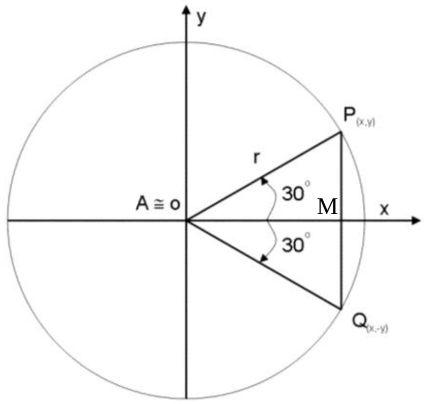
Lo que llamaremos relación Pitagórica de la trigonometría, que también puede expresarse:

$$tg^2(\alpha) + 1 = \sec^2(\alpha)$$
$$1 + \cot g^2(\alpha) = \cos ec^2(\alpha)$$

Razones trigonométricas de 30º, 45º, 60º

Pueden obtenerse fácilmente realizando algunas consideraciones geométricas:

a) $\alpha = 30^0$



Dibujamos los triángulos **POM** y **MOQ**, resultando:

$\hat{P} = \hat{O} = \hat{Q} = 60^0$, lo que implica que el triangulo **POQ** es equilatero, con:

$\overline{PQ} = r \qquad \overline{PM} = \overline{MQ} = r/2$

$$\overline{PM} = \sqrt{r^2 - \left(r/2\right)^2} = \sqrt{3}/2 \, r$$

En estas condiciones obtenemos:

$$sen\left(30^0\right) = \frac{y}{r} = \frac{r/2}{r} = \frac{1}{2} \qquad cos\left(30^0\right) = \frac{x}{r} = \frac{\left(\sqrt{3}/2\right)r}{r} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

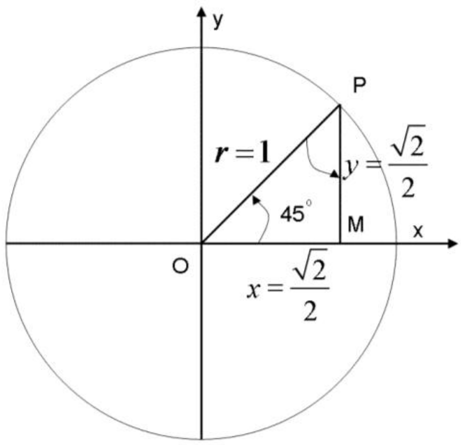
$$tg\left(30^0\right) = \frac{r/2}{\left(\sqrt{3}/2\right)r} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$cotg\left(30^0\right) = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$$

$$sec\left(30^0\right) = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2}{3}\sqrt{3}$$

$$cosec\left(30^0\right) = 2$$

b) $\alpha = 45^0$



El triangulo **POM** es isósceles $(x = y)$ por el teorema de Pitágoras: $r^2 = x^2 + y^2$

Y siendo $x = y$, reemplazando en la ecuación anterior, tenemos:

$$r^2 = 2x^2$$

$$x = \frac{r}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}r$$

Para $r = 1$ se escribe: $x = y = \frac{\sqrt{2}}{2}$

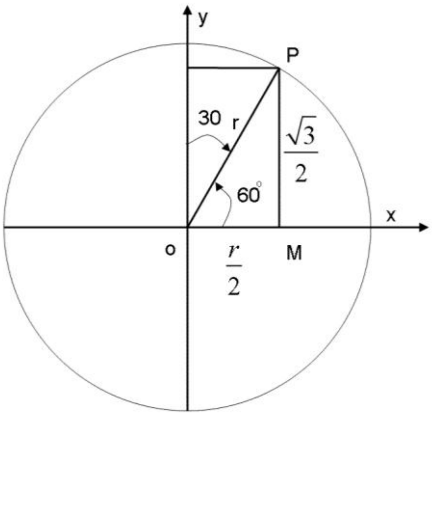
Resultando:

$$sen(45^0) = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad cosec(45^0) = \sqrt{2}$$

$$cos(45^0) = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad sec(45^0) = \sqrt{2}$$

$$tg(45^0) = 1 \qquad cotg(45^0) = 1$$

c) $\alpha = 60^0$



Para obtener los lados **OM** y **PM**; comparar con la figura que corresponde a $\alpha = 30^0$.

$$sen\left(60^0\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad cosec\left(60^0\right) = \frac{2}{3}\sqrt{3}$$

$$cos\left(60^0\right) = \frac{1}{2} \qquad sec\left(60^0\right) = 2$$

$$tg\left(60^0\right) = \sqrt{3} \qquad cotg\left(60^0\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Las deducciones precedentes pueden resumirse en el siguiente cuadro:

Rad.	Grados sexag.	sen	cos	tg	cosec	sec	cotg
0	$\mathbf{0^0}$	**0**	**1**	**0**	$\nexists$	**1**	$\nexists$
$\frac{1}{6}\pi$	$\mathbf{30^0}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	**2**	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
$\frac{1}{4}\pi$	$\mathbf{45^0}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	**1**	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	**1**
$\frac{1}{3}\pi$	$\mathbf{60^0}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	**2**	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
$\frac{1}{2}\pi$	$\mathbf{90^0}$	**1**	**0**	$\nexists$	**1**	$\nexists$	**0**

Identidades trigonométricas

Una identidad es una igualdad que se cumple para todos los valores permisibles de la variable.

A continuación, daremos una nómina de identidades (sin demostrar) que entendemos resultando de conocimiento ineludible para un estudiante de ingeniería.

$$sen(\alpha+\beta) = sen(\alpha)\cdot cos(\beta) + cos(\alpha)\cdot sen(\beta)$$

$$sen(\alpha-\beta) = sen(\alpha)\cdot cos(\beta) - cos(\alpha)\cdot sen(\beta)$$

$$cos(\alpha+\beta) = cos(\alpha)\cdot cos(\beta) - sen(\alpha)\cdot sen(\beta)$$

$$cos(\alpha-\beta) = cos(\alpha)\cdot cos(\beta) + sen(\alpha)\cdot sen(\beta)$$

$$tg(\alpha+\beta) = \frac{tg(\alpha)+tg(\beta)}{1-tg(\alpha)tg(\beta)}$$

$$tg(\alpha-\beta) = \frac{tg(\alpha)-tg(\beta)}{1+tg(\alpha)tg(\beta)}$$

Resolución de un triángulo rectángulo

Resolver un triángulo rectángulo es hallar uno o más elementos desconocidos a partir de los elementos (lados y ángulos) conocidos.

Relación entre los lados. Teorema de Pitágoras

El cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.

Relación entre los ángulos

Los ángulos de un triángulo suman 180^0:

Teorema del seno

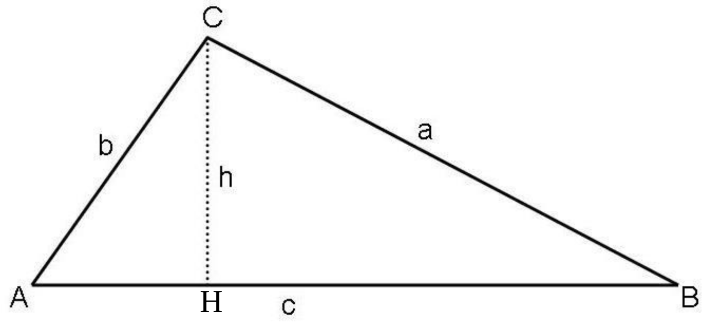
Los lados de un triángulo son proporcionales a los senos de sus ángulos opuestos

$$\frac{A}{sen(A)}=\frac{B}{sen(B)}=\frac{C}{sen(C)}$$

Demostración:

Para demostrarlo aplicamos la estrategia de la altura. Trazamos la altura **h** desde el vértice **C**. Los triángulos **AHC** y **BHC** son rectángulos. Por tanto:

$$\left.\begin{array}{l} sen(A)=\dfrac{h}{b}\rightarrow h=b\cdot sen(A) \\ sen(B)=\dfrac{h}{a}\rightarrow h=a\cdot sen(B) \end{array}\right\} b\cdot sen(A)=a\cdot sen(B)\rightarrow \frac{a}{sen(A)}=\frac{b}{sen(B)}$$



Esta es la primera de las igualdades buscadas.

Si trazamos la altura desde el vértice **B**, relacionaríamos los lados **a** y **c** con sus ángulos opuestos, obteniendo:

$$\frac{A}{sen(A)}=\frac{C}{sen(C)}$$

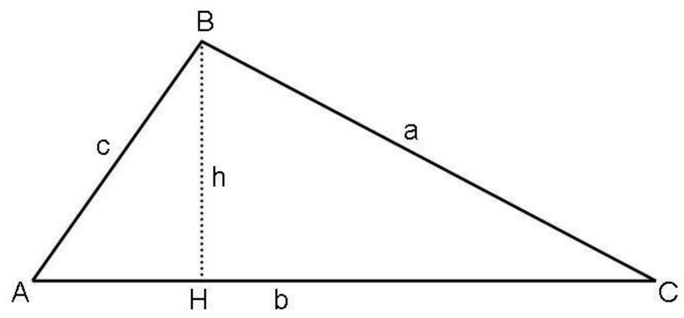
Se completa, así, la cadena de igualdades que queríamos demostrar.

Teorema del coseno

El cuadrado de un lado es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos lados menos el doble producto de dichos dos lados por el coseno del ángulo comprendido entre ellos:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot bc \cdot cos(A)$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot ac \cdot cos(B)$$
$$c^2 = b^2 + a^2 - 2 \cdot ba \cdot cos(C)$$

Demostración:
Trazamos la altura **h**, sobre el lado **b**:



$$cos(A) = \frac{\overline{AH}}{c} \rightarrow \overline{AH} = c \cdot cos(A)$$
$$CH = b - AH = b - c.\cos(A)$$

Aplicando el teorema de Pitágoras a los triángulos **AHB** y **BHC** y teniendo en cuenta las desigualdades anteriores, resulta:

$$a^2 = h^2 + \overline{HC}^2 = h^2 + (b - c \cdot cos(A))^2 =$$
$$= h^2 + b^2 + c^2 \cdot cos^2(A) - 2bc \cdot cos(A)$$
$$c^2 = h^2 + \overline{AH}^2 = h^2 + (c \cdot cos(A))^2 = h^2 + c^2 \cdot cos^2(A)$$

Restando:

$$a^2 - c^2 = b^2 - 2bc \cdot cos(A)$$

Despejando:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot cos(A)$$

Deforma análoga se llegaría a las otras dos relaciones.