# ***Funciones***

¿Para qué sirven las funciones?

a) *En la Física*

Sabemos que al suspender un peso de un resorte, éste se alarga, ¿podríamos determinar la ley que rige este alargamiento, al menos para un determinado intervalo? Sería como tratar de expresar el alargamiento del resorte en función del tiempo.

b) *En Química*

En el laboratorio de Química, ¿podemos estudiar la temperatura de una masa de agua con respecto al tiempo en que es sometida al calor? Se trata de relacionar la temperatura en función del tiempo.

c) *En Economía*

Un investigador suele expresar: el consumo en función del ingreso, también la oferta en función del precio, o el costo total de una empresa en función de los cambios de producción, entre otros muchos ejemplos donde se analiza cómo se comporta una variable en respuesta a los cambios que se producen en otras variables.

La palabra ***función*** se usa frecuentemente para indicar una relación o dependencia de una cantidad respecto de otra.

***Definición***:

*Una función es una relación entre dos conjuntos que cumple con las condiciones de existencia y unicidad.*

***Existencia:*** Para todo elemento del conjunto de partida, existe por lo menos un elemento del conjunto de llegada con el cual se relaciona.

**A:** Conjunto de partida (Dominio) $f : A \longrightarrow B$

**B:** Conjunto de llegada (Codominio) $\forall a \in A \, , \exists b \in B \, / \, (a,b) \in f.$

***Unicidad:*** Cada elemento del conjunto de partida se encuentra relacionado con un **único** elemento del conjunto de llegada.

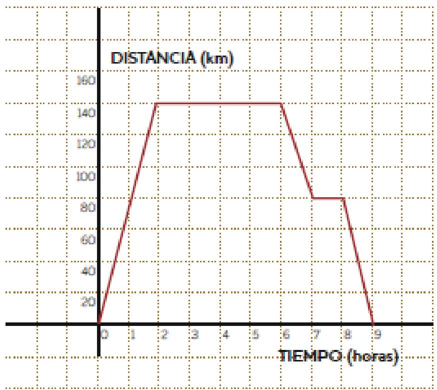
$(a,b) \in f \wedge (a,c) \in f \Rightarrow b = c$

Las funciones se utilizan como herramienta para modelizar una situación problemática. No se trata de una tabla de valores, no es una expresión simbólica, no es un gráfico. Es todo lo anterior de manera integrada.

## Interpretación gráfica

Resolvamos estos problemas iniciales:

1) La siguiente gráfica representa una excursión en cierto transporte de un grupo de estudiantes, reflejando el tiempo (en horas) y la distancia al colegio (en kilómetros).




a) ¿A cuántos kilómetros estaba el lugar que visitaron?
b) ¿Cuánto tiempo duró la visita?
c) ¿Se detuvieron en algún momento a la ida?, ¿y a la vuelta?
d) ¿Cuánto duró la excursión completa, ida y vuelta?

Una función es una relación entre los elementos de dos conjuntos tales que a todos los elementos de un conjunto inicial que llamaremos Dominio, le asigna uno y solo uno de los elementos del conjunto final, que llamamos Codominio. Al elemento final se le conoce como imagen de la función.

Una relación entre dos variables es función si a cada valor de la variable independiente le corresponde un único valor de la variable dependiente. **El dominio de una función f es el conjunto de todos los valores que puede tomar la variable independiente x**. Se lo simboliza Dom f.

**La imagen de una función f es el conjunto de todos los valores que toma la variable dependiente y**. Se lo simboliza Im f.

**EJEMPLO**

Si la expresión analítica de una función polinómica es $f(x)= -x^4+4$. el dominio son todos los números reales.
Dom f = $\Re$ .

=> Si la expresión analítica de una función es un cociente, el dominio son todos los números reales, excepto los que anulan el denominador.

Si la función es $f(x)=\dfrac{2}{x-1}$, entonces el Dom f = $\Re - \{1\}$

**Introducción al análisis de funciones**

Las características de las funciones se utilizan como herramientas para resolver problemas. Por ejemplo, analizar el crecimiento o decrecimiento de una gráfica, reconocer los extremos e interpretar esas cuestiones en el contexto de un problema es una manera eficiente de analizar modelos matemáticos. Revisaremos algunos de estos conceptos para poder aplicarlos a la resolución de problemas.

- *Intervalo de crecimiento*: Un intervalo es creciente cuando al aumentar el valor de la variable independiente, aumenta también el valor de la variable dependiente.
- *Intervalo de decrecimiento*: Un intervalo es decreciente cuando al aumentar el valor de la variable independiente, disminuye el valor de la variable dependiente.
- *Intervalo constante*: Un intervalo es constante cuando al aumentar el valor de la variable independiente, no se producen variaciones en la variable dependiente.
- *Máximo*: Es un punto de la función en el cual ésta pasa de ser creciente a decreciente.
- *Mínimo*: Es un punto de la función en el cual ésta pasa de ser decreciente a creciente.
- *Raíces o ceros*: Son los valores del dominio que tienen por imagen a cero. Gráficamente es la intersección de la función con el eje de abscisas.

Analicemos la *función lineal*: f(x) = y = m.x + b

Donde "m" y "b" son números reales. Veamos la interpretación gráfica de estos números.

Para obtener la intersección de la gráfica con el eje de ordenadas, el eje "y", la variable independiente "x" vale cero. Es decir. f(o) = y = m.0 + b = b

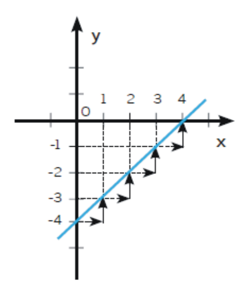
Por lo tanto, el número "b" indica la ordenada al origen, es decir, la intersección de la gráfica con el eje de ordenadas.

Con el dato de la ordenada al origen, entonces, tenemos un punto de la recta. Para graficarla necesitamos otro más. Para encontrarlo, utilizamos el otro dato de la función lineal, el número real "m", que representa la inclinación o pendiente de la recta, la cual está relacionada con el ángulo que tiene la recta respecto a la horizontal.

EJEMPLO

$f(x) = y = x - 4$

Cuando la abscisa (unidad horizontal) aumenta una unidad, la ordenada (ordenada vertical) también aumenta una unidad.




$Domf = R$

$\operatorname{Im} f = R$

$Int.crec.: (-\infty; \infty)$

$Raíz: x = 4$

La curva que representa una función cuadrática es la parábola que modelizan situaciones como:

- Un proyectil lanzado hacia delante y arriba.
- Las antenas parabólicas satelitales y de telefonía.
- Los techos de galpones son parabólicos.
- Los puentes colgantes.

La forma polinómica de una función cuadrática es:

$$f(x) = ax^2 + b.x + c$$
$$a \neq 0$$

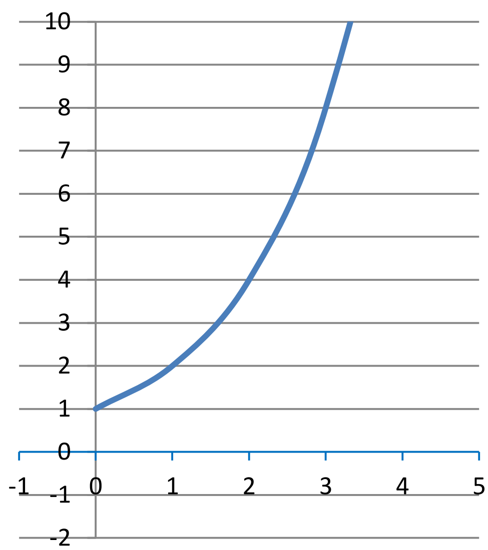
Para hallar las *raíces* se iguala la función a 0 y se resuelve la ecuación cuadrática.

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Para determinar las coordenadas del *vértice* se utilizan las siguientes estructuras:

$$V_x = -\frac{b}{a} \qquad\qquad V_y = f(V_x)$$

Ejemplo: $f(x) = -4x + x^2 + 3$




$Raíces: x_1 = 1 \ y \ x_2 = 2$
$Vértice: V_x = 2$
$V_y = -1$

$V(2; -1)$

$Dom \ f = R$
$Im \ f = [-1; \infty)$

$Intervalo \ de \ decrecimiento: (-\infty; 2)$
$Intervalo \ de \ crecimiento: (2; \infty)$
$V \ es \ un \ mínimo$

Las funciones que se utilizaron en la modelización de los problemas anteriores están formado por uno o más términos; cada uno de los cuales se los llama MONOMIOS.

Cuando la función está formada por varios términos, a la expresión se la suele llamar POLINOMIO. El grado de la función polinómica es el mayor exponente que tiene la variable.

**Función exponencial**

La función exponencial aparece con frecuencia en modelos matemáticos de diferentes procesos evolutivos.

La FUNCIÓN EXPONENCIAL está definida como una función $f: \Re \to \Re$ que verifica que $f(x) = y = a^x$, donde $a>0$ y $a \neq 1$, es un número real.

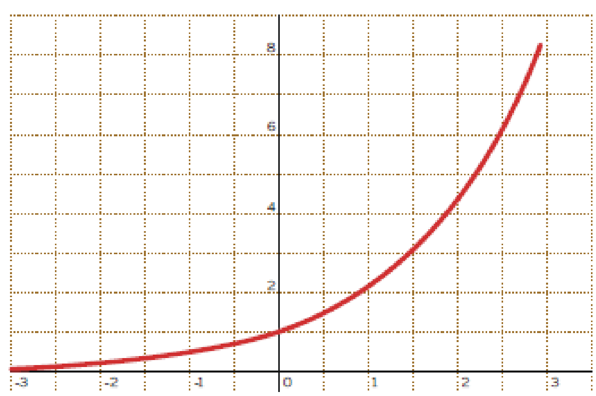
Por ejemplo, las amebas son seres unicelulares que se reproducen dividiéndose en dos. Supongamos que las condiciones de un cultivo son tales que las amebas se duplican aproximadamente cada hora y que, inicialmente solo hay una ameba.

La función que representa la situación anterior es $f(x) = 2^x$

**Gráfica de funciones exponenciales**

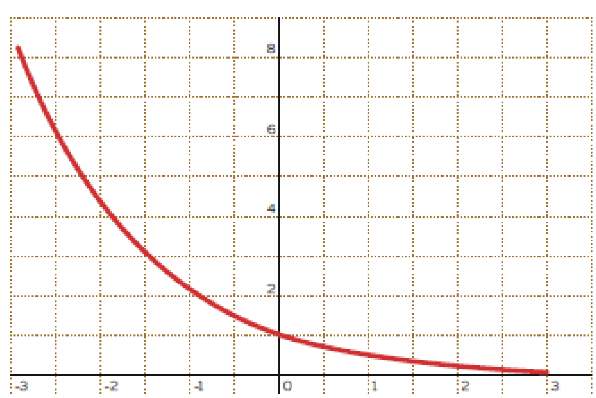
Para iniciar el estudio del gráfico de funciones exponenciales, se tiene en cuenta que hay dos posibilidades según la base de la función tome valores mayores o menores que la unidad.

Por ejemplo, el gráfico de la función $f(x) = 2^x$ es el siguiente:




$$Dom\ f = R$$
$$Im\ f = (0; \infty)$$
$$Int. Crec.: (-\infty; \infty)$$

En cambio, el gráfico de la función: $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ es

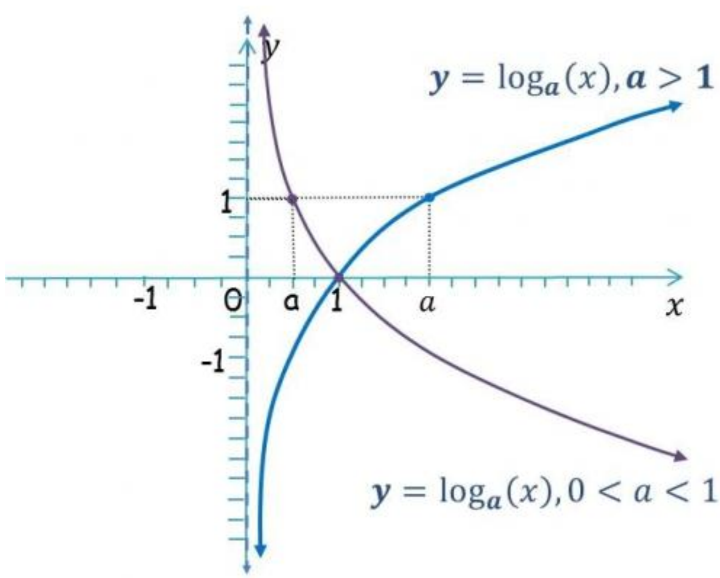



$$Dom\ f = R$$
$$Im\ f = (0; \infty)$$
$$Int. Decrec.: (-\infty; \infty)$$

## Función logarítmica

La función $f: \Re^+ \to \Re$ definida por
$f(x) = \log_a x$ tal que $y = \log_a x \Leftrightarrow a^y = x$, con a>0
y $a \neq 1$, un número real, se llama
FUNCIÓN LOGARÍTMICA de base a.

## Representación gráfica de la función logarítmica




$Dom\ f = (0; \infty)$
$Im\ f = R$
$Raíz: x = 1$

$Si\ 0 < a < 1$
$f$ *es decreciente en todo su dominio*

$Si\ a > 1$
$f$ *es creciente en todo su dominio*